

Chapter 1: Part II

Note Title

1/17/2011

The 4-color problem مسئلہ چار رنگ

حدس : حرفتہ خرافانی علم روان؛ 4 رنگ، پانچ رنگ.

1852

مسئلہ چار رنگ ← نظر گراف؟
ترکیب سے درپیش گشت
توپیش،

نکتہ اول:

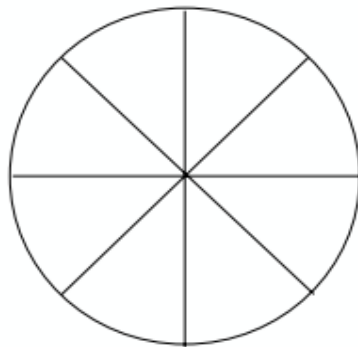


Fig. 2.22 This map is excluded from the four-color conjecture.

نکته: !

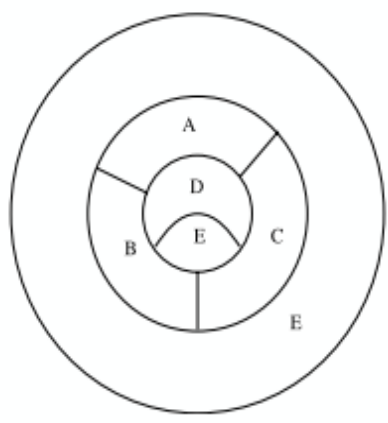
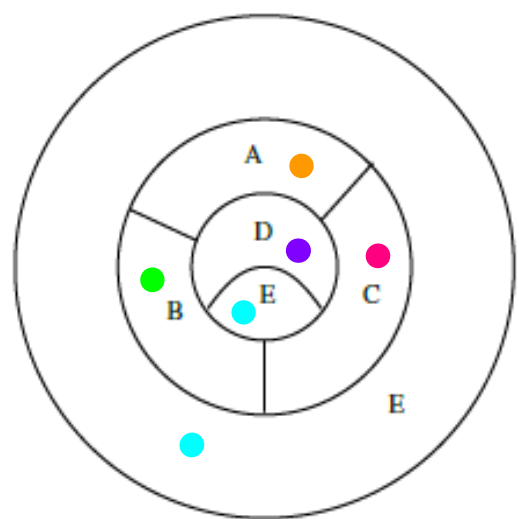
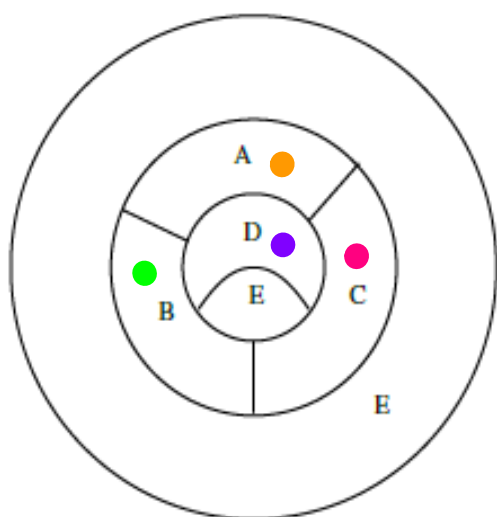
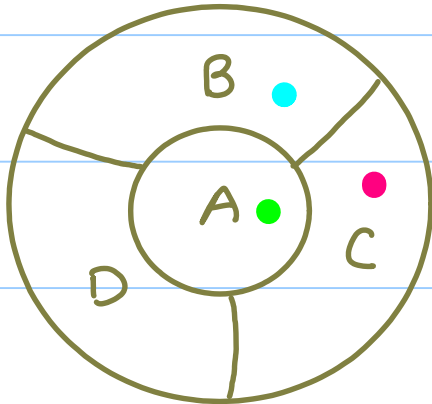


Fig. 2.23 Map with disconnected regions that does not fall into the four-color theorem.



• در سال 1852 : سرزنگ مانی ثبت.

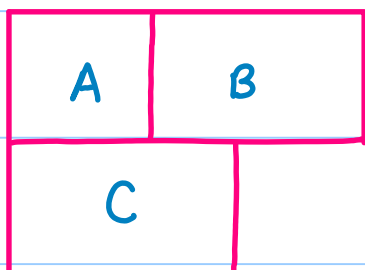
• مثال نقض:



این نقشه مانی توان به سرزنگ، زنگ و ...

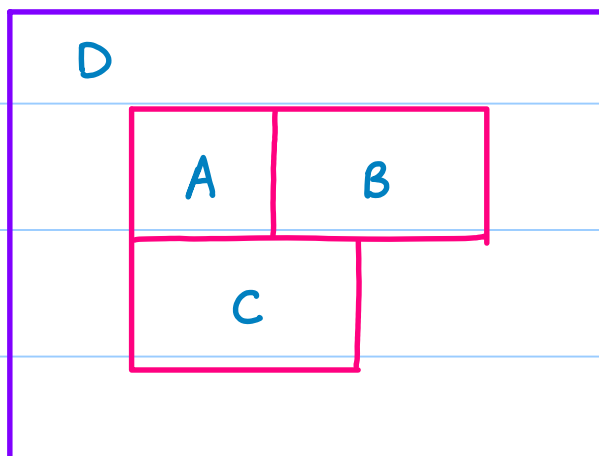
• De Morgan's proof. 1852

• ایر: اصلی: دهرنقه اربیش از ۴ کسر با هم حایه نیستند.



• می‌تواند در آن ۳ کشور در بهار
حی هستند.

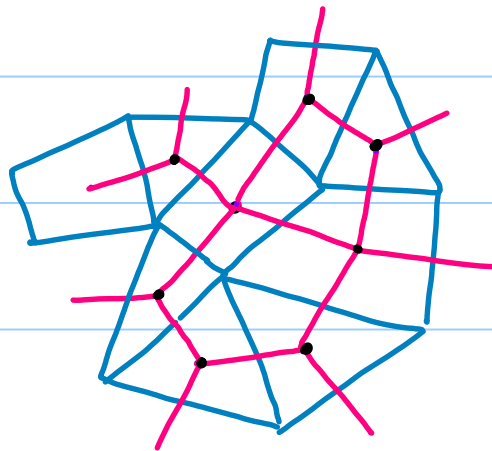
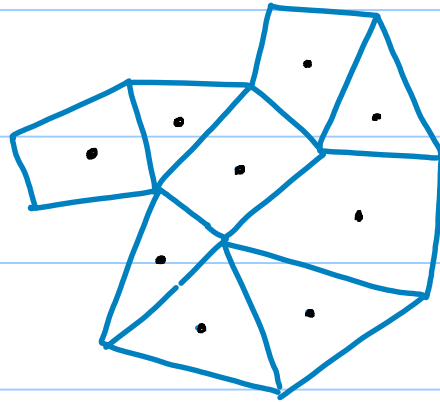
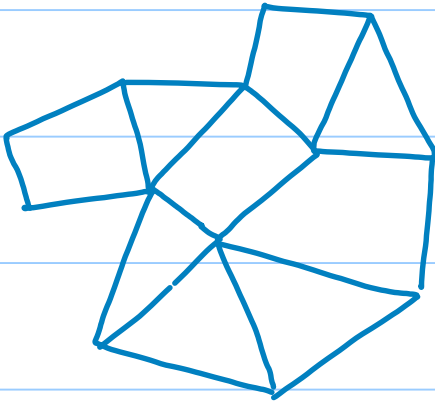
• می‌تواند در آن ۴ کشور A, B, C, D, دو به در بهار حی هستند.



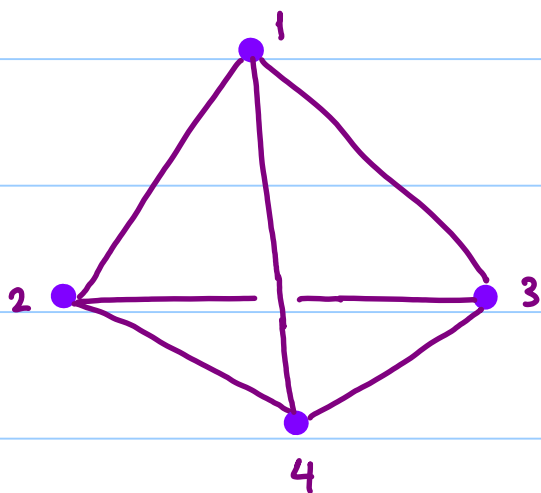
ایده اصلی اجابت در میان : نشر در آن ۵ کشور در بهار هستند!

• تناظر یک به یک بنی گراف؟ و نقش؟

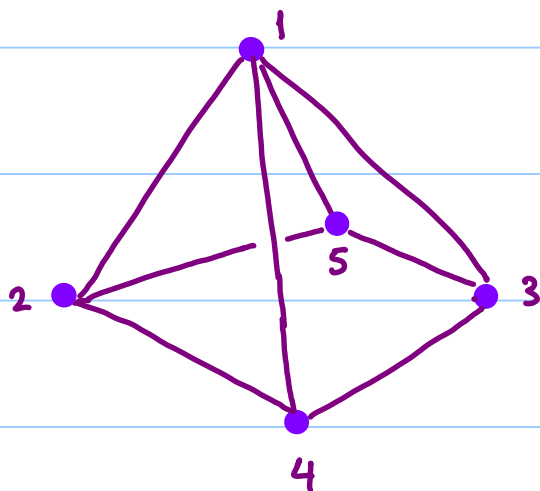
به ازای هر نقشه هر دو گراف یک گراف به ترتیب زیر رسم شد.



اگر چه بیشتر در سطح در **درب** به هم می‌پیوندند، شکل‌های
مربوط به سمت زیر است.



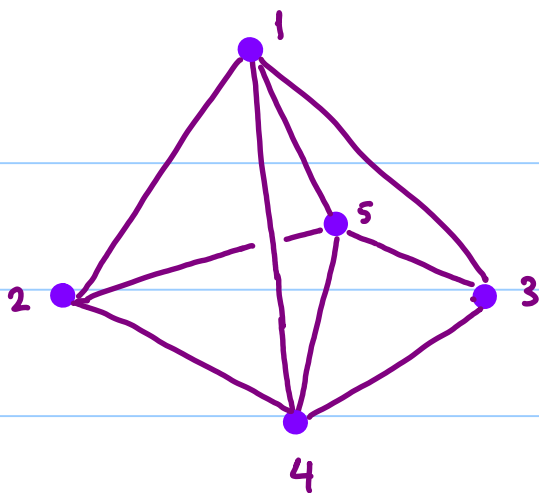
اگر چه بیشتر افغان‌ها هم در خواجه تعداد
بیشتر از کتور **درب** به هم می‌پیوندند
و نسبت به شکل زیر خواص می‌باشد.



در این شکل که کتور در
وجود دارد و هر کتور هم کتور

درب در **بام** می‌پیوندند. مثلاً $(4,5)$ و $(2,3)$ به هم می‌پیوندند.

در آن شکل زیر ما می‌توانیم که در آن $(4,5)$ نیز به هم می‌پیوندند.

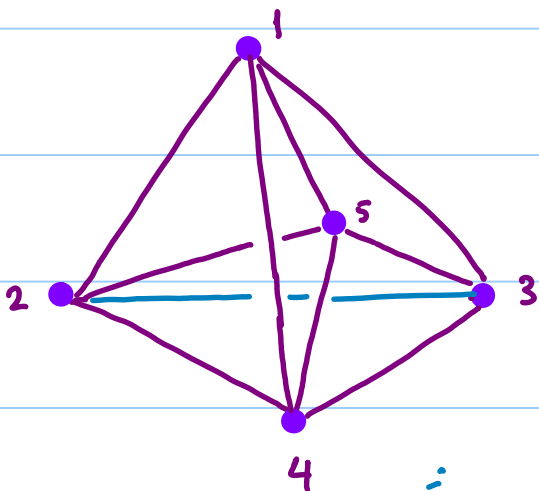


این شکل هنوز در درجه است زیرا
منحرفه از میان آن بهر است؛

$$\chi = 5 - 9 + 6 = 2$$

در درجه نیست (2,3) هنوز با هم متصل نیستند. اگر (۲,۳) را نیز با هم متصل کنیم، آنجا شکل به هم می‌رسد.

در آید:



در این حالت هر جفت مرتب شده به این شکل در می‌آید
که از تکرار آن که این امر با هم به هم می‌رسد
تجسسی مرتب شده در هم؛ اما منشعبه‌ها را:

در دو ربع افغانه کردن ضلع (3,4) E یک در دو افغانه کردن

در F دو در دو افغانه کردن به قدرت { و جبر (۲۳۴), (۲۳۵) }.

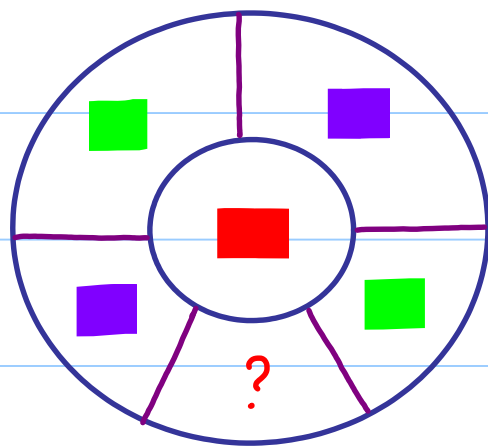
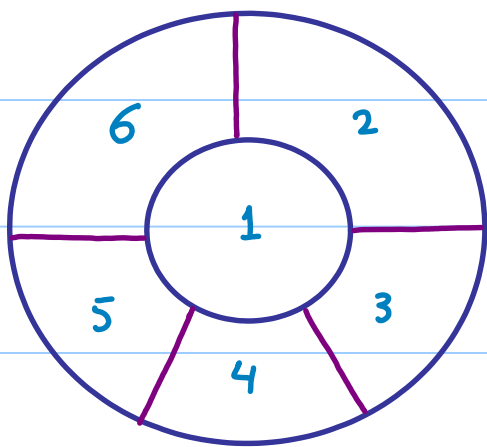
دقت کنید: قبلاً (2345) یک درجه نبود، به همین دلیل افغانه کردن یک ضلع (23)

در دو درجه یعنی (۲۳۴) و (۲۳۵) را افغانه کرد، در نتیجه منشعبه‌ها را نیز افغانه کرد.

۱، خرد دومرمان خبی زرد فمید نه انباش اشکال دارد.

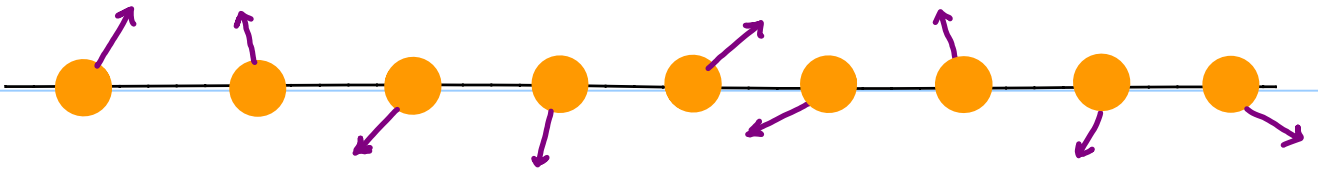
ان قیصه با قیصه ۴ رنگ تفاوت دارد.

Global (Topological) obstruction



با وجود این که در شکل سمت چپ ۴ کشور با هم همپایه نیستند ولی
بهر رنگ آنیتر به ۴ رنگ احتیاج داریم.

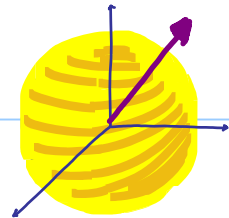
Models With $O(n)$ Symmetry.



$$H = - \sum_i J_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$$

$$\mathcal{Z}_N = \int \mathcal{D}\Omega \, e^{\sum_i J_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}}$$

$$\mathcal{D}_N \Omega = d\Omega_1^{(n)} d\Omega_2^{(n)} \dots d\Omega_N^{(n)}$$



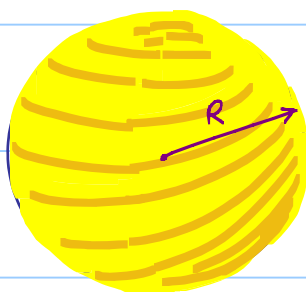
$d^n \Omega$ = الان سطح بر ر: n بعدی بهنج 1

سطح کر: n بعدی بشع $1 = S_n(1)$



$$S_n(1) = \int d\Omega$$

سطح کر: n بعدی بشع $R = S_n(R)$



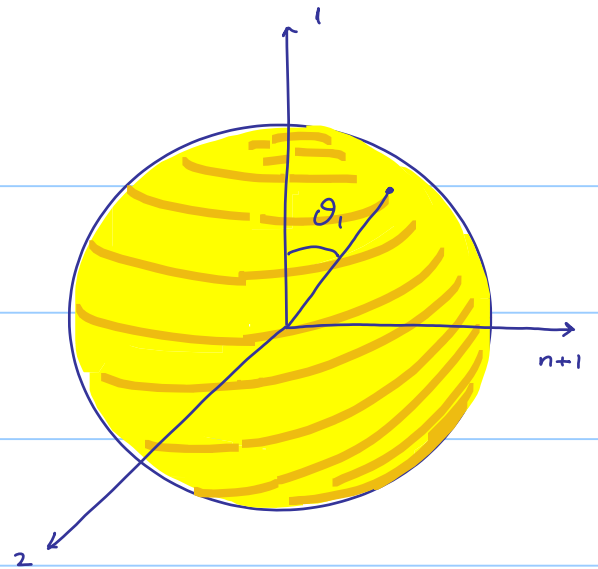
$$S_n(R) = R^n S_n(1)$$

حجم کر: n بعدی بشع $R = B_n(R)$

$$B_n(R) = \int_0^R S_n(r) dr = \int_0^R r^n S_n(1) dr = \frac{1}{n+1} R^{n+1} S_n(1).$$

$$B_n(R) = \frac{1}{n+1} R^{n+1} S_n(1)$$

Ω^n چیست؟



$n=2$

برای درستی

$$x_1 = r \cos \theta_1$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\theta_1 : 0 \rightarrow \pi, \quad \theta_2 : 0 \rightarrow 2\pi$$

$$dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 dr \sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2$$

$$d\Omega^{(2)} = \sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2$$

این همان سطح کروی است
درستی

$n=3$

$$x_1 = r \cos \theta_1$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

$$x_4 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = r^3 dr \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

الان سطح جبره نر: سه بعدی

$$d\Omega^{(3)} = \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

$$\rightarrow d\Omega^{(n)} = \sin^2 \theta_1 d\theta_1 d\Omega^{(n-2)}$$

$$x_1 = C_n \theta_1$$

$$x_2 = \sin \theta_1 C_n \theta_2$$

$$x_3 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 C_n \theta_3$$

$\vdots$

$$x_n = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{n-1} C_n \theta_n$$

$$x_{n+1} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{n-1} \sin \theta_n$$

$$\rightarrow dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} = r^n dr d\Omega^{(n)}$$

$$d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1} \theta_1 \sin^{n-2} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1} d\theta_n$$

$$d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1} \theta_1 \sin^{n-2} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1} d\theta_n.$$

$$d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1} \theta_1 d\theta_1 d\Omega^{(n-1)}$$

$$\rightarrow S_n(1) = 2 \pi^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

$$S_1(1) = \text{محيط دایره} = 2\pi$$

$$S_2(1) = \text{مساحت دایره} = 2\pi \frac{1}{\Gamma(3/2)} = 4\pi$$

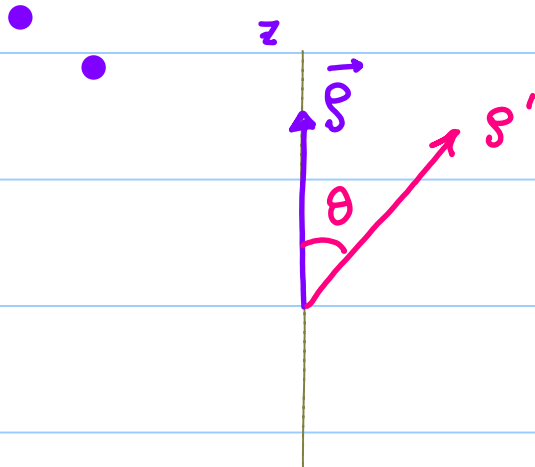
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Recursive Method $O(n)$ بیش تر

$$Z_{N+1} = \int D_N S e^{\sum_{i=1}^{N-1} J_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}} e^{J_N \vec{S}_N \cdot \vec{S}_{N+1}}$$

$$= \int D_N S (\quad) \int d^{(n)} \vec{S}_{N+1} e^{J_N \vec{S}_N \cdot \vec{S}_{N+1}}$$

$$\int e^{J \vec{S} \cdot \vec{S}'} d^{(n)} \vec{S}' = \lambda_1(n, J)$$



$$\lambda_1(n, J) = \int e^{J \cos \theta} d^n \Omega$$

$$\mathcal{Z}_N = [\lambda_{i(n,J)}]^{N-1} \int d\Omega$$

$$\mathcal{Z}_N = [\lambda_{i(n,J)}]^{N-1} S_n(1)$$

• $\int_{\Omega}:$ $\lambda_{i(2,J)} = \int e^{J \vec{s} \cdot \vec{s}'} d^2 s' = \int e^{J \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 e^{J \cos \theta} d\cos \theta = \frac{2\pi}{J} (e^J - e^{-J})$$

$$\rightarrow \lambda_{i(2,J)} = 4\pi \frac{S_{in} J}{J}$$

$$\mathcal{Z}_N(n=2,J) = 4\pi \left(4\pi \frac{S_{in} J}{J} \right)^{N-1}$$

$\uparrow$
 $S_2(1)$

- for $n=3$ $d\Omega^{(3)} = \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\phi$

$$\lambda_1(3, J) = \int d\Omega^{(3)} e^{J \cdot \hat{s}} = \int \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\phi e^{J \cos \theta_1}$$

$$= \left(\int \sin^2 \theta_1 e^{J \cos \theta_1} d\theta_1 \right) \underbrace{\int \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi}_{S_2(1)}$$

$$\lambda_1(3, J) = \left(\int \sin^2 \theta_1 e^{J \cos \theta_1} d\theta_1 \right) S_2(1)$$

یادماندگی

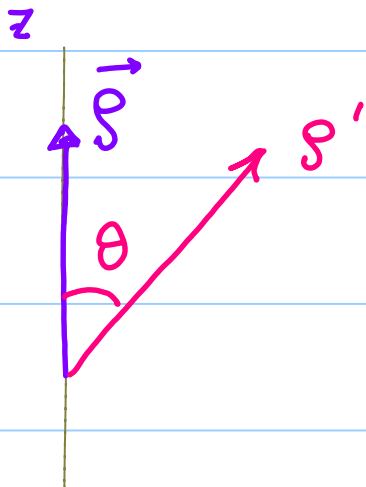
$$d\Omega^{(n)} = \sin^{n-1} \theta_1 d\theta_1 d\Omega^{(n-1)}$$

$$\lambda_1(n, J) = \left(\int \sin \theta e^{J \cos \theta} d\theta \right) S_{n-1}(1)$$

Correlation functions تابع همبستگی در مدل $O(n)$

$$\langle \vec{s}_k \cdot \vec{s}_{k+r} \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\vec{\Omega}_1 \dots d\vec{\Omega}_N (\vec{s}_k \cdot \vec{s}_{k+r}) e^{J \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1}}$$

$$\int \vec{s}' e^{J \vec{s} \cdot \vec{s}'} d\vec{s}' = \lambda_2(n, J) \vec{s}$$



$$\int \text{---} \bullet e^{J \text{---} \bullet \text{---} \bullet} = \lambda_2(n, J) \text{---} \bullet \text{---}$$

$$\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \frac{1}{Z_N} \int S_k \cdot S_{k+r} e^{J S_1 \cdot S_2} e^{J S_2 \cdot S_3} \dots e^{J S_{N-1} \cdot S_N}$$

$$= \frac{A_N}{Z_N} \quad Z_N = S_n(1) [\lambda_1(n, J)]^{N-1}$$

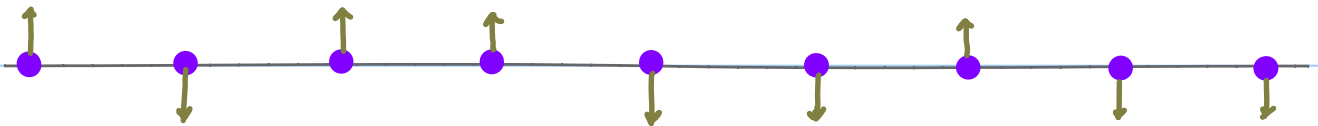
$$A_N = \int \text{---} \overset{k}{\bullet} \text{---} \overset{k+r}{\bullet} \text{---} \overset{N}{\text{---}} e^{J S_1 \cdot S_2} e^{J S_2 \cdot S_3} \dots e^{J S_{N-1} \cdot S_N}$$

$$= S_n(1) [\lambda_1(n, J)]^k [\lambda_2(n, J)]^r [\lambda_1(n, J)]^{N-k-r}$$

$$\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \left[\frac{\lambda_2(n, J)}{\lambda_1(n, J)} \right]^r$$

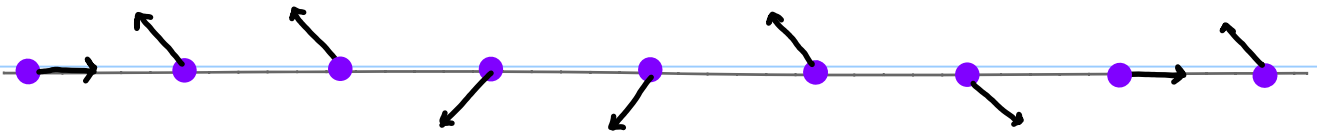
Models With Zn Symmetry.

Ising Model = $\mathbb{Z}_2$ Model

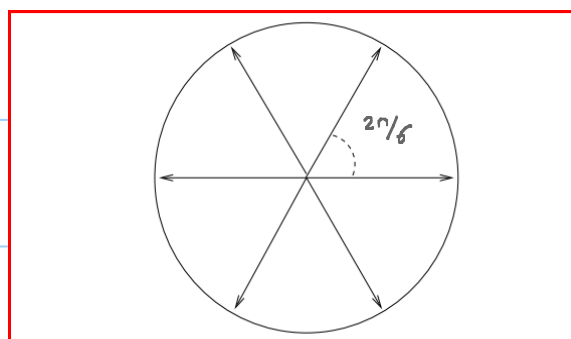
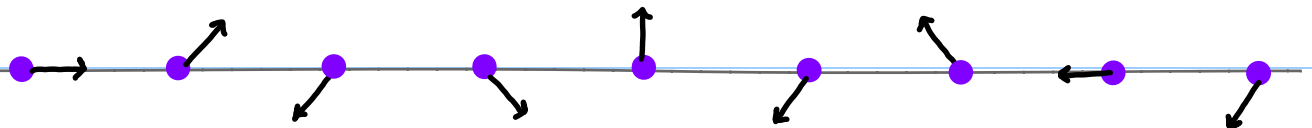


$\mathbb{Z}_3$ Model

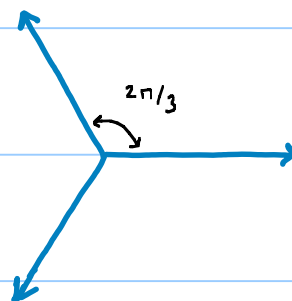
$$H = -J \sum_{i,j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$



$\mathbb{Z}_6$ Model



$\mathbb{Z}_3$ Model



$$\rightarrow \frac{2}{3} (S_i \cdot S_j + \frac{1}{2}) = \begin{cases} 1 & S_i = S_j \\ 0 & S_i \neq S_j \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_3$ Model = 3-state Potts Model.

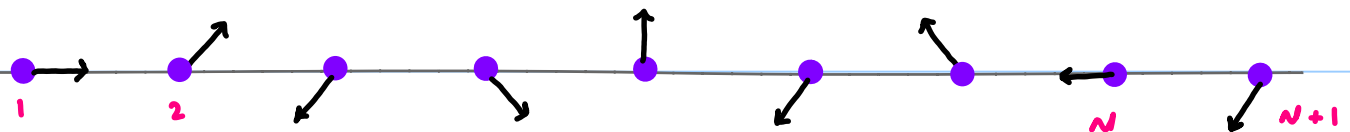
$$S_k \longleftrightarrow \phi_k = \frac{2\pi}{n} \theta_k \quad \theta_k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$H = -J \sum_{\langle k, l \rangle} S_k \cdot S_l$$

$$\rightarrow H = -J \sum_{\langle k, l \rangle} C_n(\phi_k - \phi_l)$$

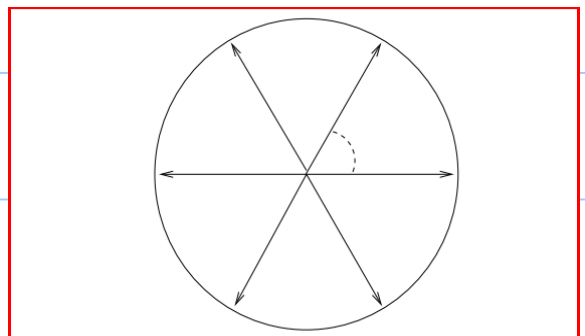
$$H = -J \sum_{\langle k,l \rangle} C_n \frac{2\pi}{n} (\theta_k - \theta_l)$$

$$\mathcal{Z}_N = \sum_{\theta_1, \dots, \theta_N=0}^{n-1} e^{J \sum_{k=1}^{N-1} C_n \frac{2\pi}{n} (\theta_k - \theta_{k+1})}$$



$$\mathcal{Z}_{N+1} = \sum_{\theta_1, \dots, \theta_N} e^{J \sum_{k=1}^{N-1} C_n \frac{2\pi}{n} (\theta_k - \theta_{k+1})} \underbrace{\sum_{\theta_{N+1}=0}^n e^{J C_n \frac{2\pi}{n} (\theta_N - \theta_{N+1})}}_{Q(\theta_N)}$$

$$n=3 \quad Q(\theta_N) = e^{J C_n \frac{2\pi}{3} (\theta_N)} + e^{J C_n \frac{2\pi}{3} (\theta_N - 1)} + e^{J C_n \frac{2\pi}{3} (\theta_N - 2)}$$



$$Q = Q(0) = e^{\mathcal{J}} + e^{-\mathcal{J}/2} + e^{-\mathcal{J}/2} = e^{\mathcal{J}} + 2e^{-\mathcal{J}/2}$$

$$\mathcal{Z}_N (n=3) = 3 \left(e^{\mathcal{J}} + 2e^{-\mathcal{J}/2} \right)^{N-1}$$

$$Z_{N+1} = Z_N \sum_{\theta_{N+1}=0}^{n-1} \exp \left[\mathcal{J} \cos \left(\frac{2\pi}{n} (\theta_N - \theta_{N+1}) \right) \right],$$

$$\mu_1(\mathcal{J}, n) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left[\mathcal{J} \cos \frac{2\pi k}{n} \right].$$

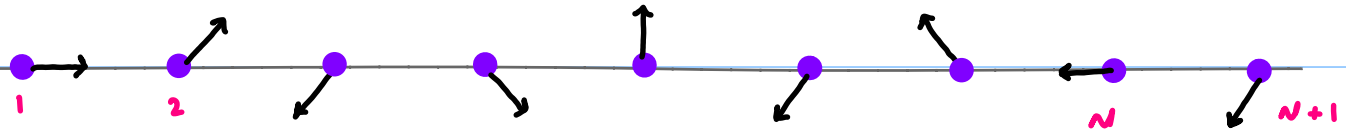
$$\mu_1(\mathcal{J}, 4) = \sum_{k=0}^3 e^{\mathcal{J} \cos \frac{2\pi k}{4}} = \sum_{k=0}^3 e^{\mathcal{J} \cos \frac{\pi k}{2}}$$

$$\mu_1(\mathcal{J}, 4) = e^{\mathcal{J}} + 1 + e^{-\mathcal{J}} + 1 = 2(1 + \cosh \mathcal{J})$$

$$\mathcal{Z}_N(\mathcal{J}, 4) = 4 [2(1 + \mathcal{C}_2 \mathcal{J})]^{N-1}$$

$$Z_N = n [\mu_1(\mathcal{J}, n)]^{N-1}.$$

محاسبه تابع پارتیشن با استفاده از روش ماتریک انتقال.



$$\mathcal{Z}_N = \sum_{\theta_1, \dots, \theta_N} e^{\mathcal{J} \sum_{k=1}^{N-1} S_k \cdot S_{k+1}}$$

$$= \sum_{\theta_1, \dots, \theta_N} \prod_{k=1}^{N-1} e^{\mathcal{J} S_k \cdot S_{k+1}}$$

$$= \sum_{\theta_1, \dots, \theta_N} \prod_{k=1}^{N-1} e^{\mathcal{J} \mathcal{C}_2 \frac{2\pi}{N} (\theta_k - \theta_{k+1})}$$

$$J \cos \frac{2\pi}{N} (\theta_1 - \theta_2)$$

$$V(\theta_1, \theta_2) = e$$

$$Z_N = \sum_{\theta_1, \dots, \theta_N} \langle \theta_1 | V | \theta_2 \rangle \langle \theta_2 | V | \theta_3 \rangle \dots \langle \theta_{N-1} | V | \theta_N \rangle$$

$$= \sum_{\theta_1, \theta_N} \langle \theta_1 | V^{N-1} | \theta_N \rangle$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & & \\ e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & \\ & e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{-J_1} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{J_1} = e^{J \cos \frac{2\pi}{N}}, \quad e^{J_2} = e^{J \cos \frac{2\pi}{N} 2}, \quad \dots \quad e^{J_i} = e^{J \cos \frac{2\pi}{N} i}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & & \\ e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} & \\ & e^{J_1} & 1 & e^{-J_1} & e^{-J_2} \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & e^{-J_1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |n-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |2\rangle, \quad \dots \quad X|n-1\rangle = |0\rangle$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \dots$$

$$V = 1 + e^{J_1} x + e^{J_2} x^2 + \dots + e^{J_{n-1}} x^{n-1}$$

$$Z_N = \sum_{\theta_1, \theta_N} \langle \theta_1 | V^{N-1} | \theta_N \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle i | V^{N-1} | j \rangle$$

$$= \langle \xi_0 | V^{N-1} | \xi_0 \rangle$$

$$|\xi_0\rangle = |0\rangle + |1\rangle + \dots + |n-1\rangle$$

$$X |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle$$

$$V |\xi_0\rangle = \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{J_i} \right) |\xi_0\rangle$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{J e_n \frac{2\pi}{n} i} \right) | \xi_0 \rangle$$

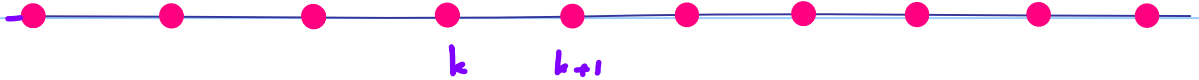
$$= \mu_1(n, J) | \xi_0 \rangle$$

$$\rightarrow Z_N(J) = \langle \xi_0 | \xi_0 \rangle [\mu_1(n, J)]^{N-1}$$

$$\rightarrow Z_N(J) = n [\mu_1(n, J)]^{N-1}$$

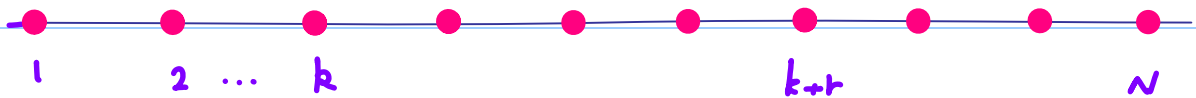
• تمرین: با استفاده از روش ماتریک انتقال، تابع همبستگی را محاسبه کنید.

Correlation functions.



$$\langle S_k \cdot S_{k+1} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial J} Z$$

But what is $\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = ?$



$$G(r) = \langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+r} \rangle = \langle \cos(\theta_i - \theta_{i+r}) \rangle.$$

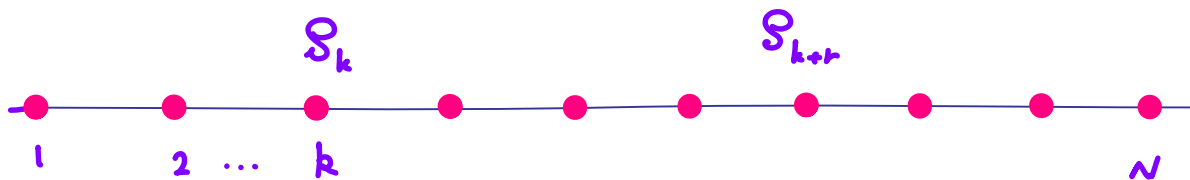
$$\langle \vec{s}_k \cdot \vec{s}_{k+r} \rangle = \frac{\sum_{s_1, \dots, s_N} \vec{s}_k \cdot \vec{s}_{k+r} e^{J(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \dots + \vec{s}_{N-1} \cdot \vec{s}_N)}}{Z_N}$$

$$\sum_{s'} e^{J s \cdot s'} = \mu_1(n, J)$$

$$\sum_s \vec{s}' e^{J \vec{s} \cdot \vec{s}'} = \mu_2(n, J) \vec{s}$$

$$\mu_2(n, J) = \frac{d\mu_1(n, J)}{dJ}$$

$$\sum_{\bullet} \text{---} \bullet e^{J \text{---} \bullet \text{---} \bullet} = \mu_2(n, J) \text{---} \bullet$$



$$\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S\}} S_k \cdot S_{k+r} e^{J S_1 \cdot S_2} \dots e^{J S_{N-1} \cdot S_N}$$

$$\langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \frac{A_N}{Z_N}$$

$$A_N = \sum_{\{S\}} e^{J S_1 \cdot S_2} e^{J S_2 \cdot S_3} \dots e^{J S_{N-1} \cdot S_N}$$

$$= [\mu_1(n, J)]^k [\mu_2(n, J)]^r [\mu_1(n, J)]^{N-k-r}$$

$$\rightarrow \langle S_k \cdot S_{k+r} \rangle = \left[\frac{\mu_2(n, J)}{\mu_1(n, J)} \right]^r$$

$$\chi = V - E + F$$

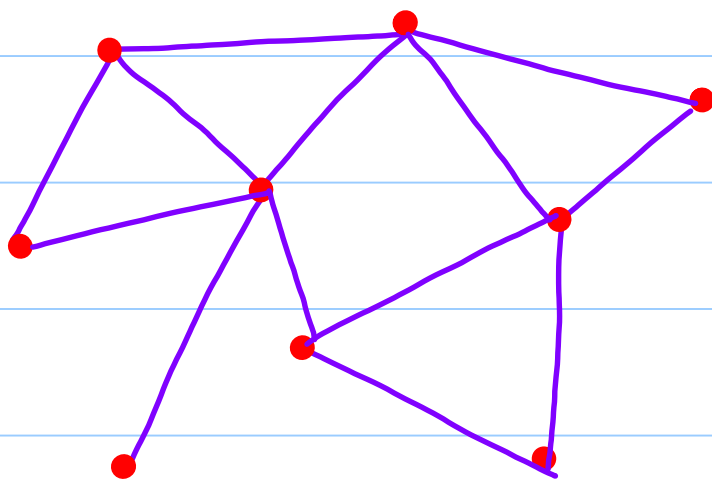
نہی: تعریف منحنی ادر

χ فقط به توپولوژی سطح بستگی دارد و نه به نوع منشعب شدن آن.

$$\chi(\text{sphere}) = 2$$

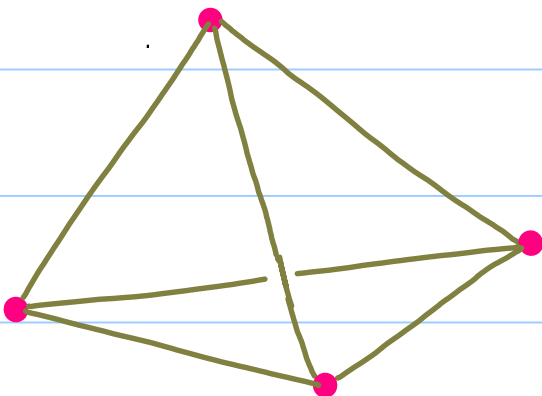
$$\chi(\text{plane}) = 1$$

$$\chi(\text{Torus}) = 0$$



plane

$$\begin{aligned}\chi &= 9 - 13 + 5 \\ &= 1\end{aligned}$$

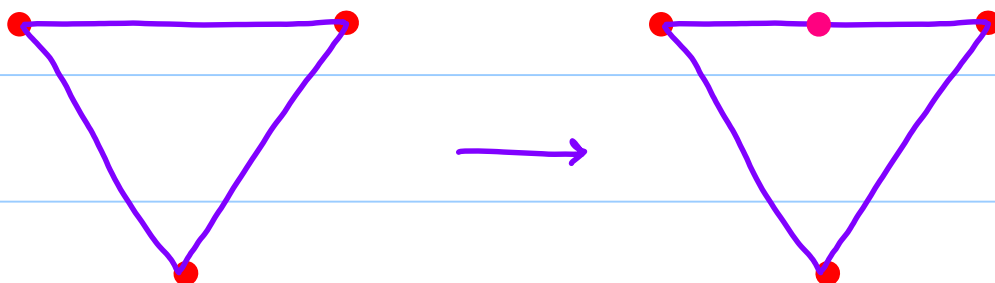


sphere

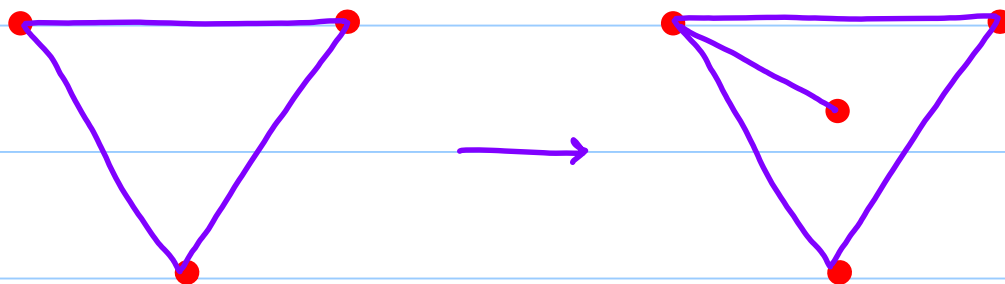
$$\chi = 4 - 6 + 4 = 2$$

• اثبات :

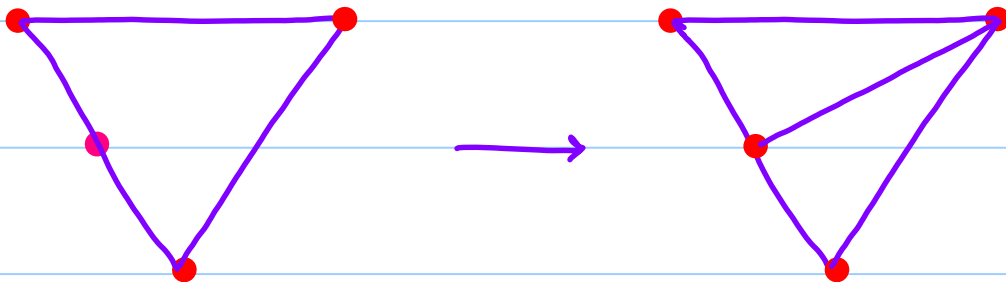
حرکت در ابتدایی که نوع مثلث برابر تغییر دهند.



$$V \longrightarrow V+1, \quad E \longrightarrow E+1 \quad x \longrightarrow x$$

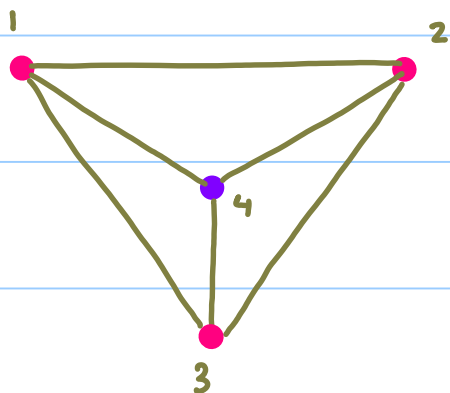
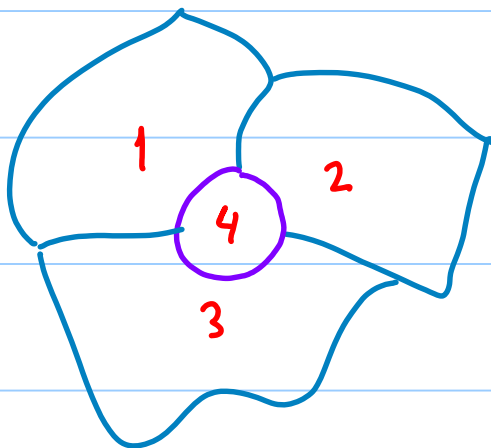


$$V \longrightarrow V+1, \quad E \longrightarrow E+1 \quad x \longrightarrow x$$



$$E \rightarrow E + 1, F \rightarrow F + 1, \chi \rightarrow \chi.$$

مسئله : نشان دهید که در هر گراف مردابیان :



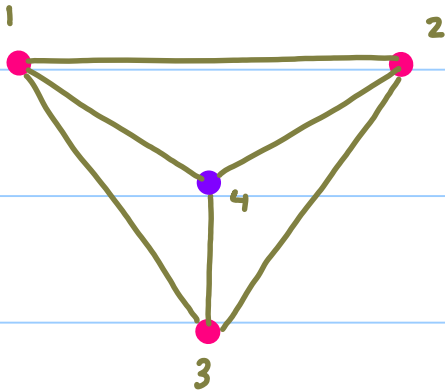
$$\chi = V - E + F$$

$$= 4 - 6 + 3 = 1$$

در اینجا سعی نمائیم با یک صفحه ساده از نظر گرافیک، اگر چنین چیزی را در نظر بگیریم، در اینجا می‌توانیم دیدن کنیم که

در اینجا یک مثلث بزرگ از آن خواهیم بود و در اینجا می‌توانیم دیدن کنیم که (۱۲۳) نیز یک وجه مستقل خواهد بود و در اینجا می‌توانیم دیدن کنیم

هر یک، ۲ خواهد بود :



$$\chi = V - E + F$$

$$= 4 - 6 + 4 = 2.$$